HOTS

PEMBAHASAN

Bocoran Ujian Nasional

Tahun Pelajaran 2018/2019

Mata Pelajaran Matematika

SMA Program IPA

Fendi Alfi Fauzi

Dokumen Pribadi
Bukan Rahasia

Pembahasan Bocoran Ujian Nasional Tahun Pelajaran 2018/2019 Matematika SMA Program IPA

Fendi Alfi Fauzi*

8 Maret 2019

1. Nilai (n) peserta diklat dipengaruhi oleh keaktifan selama kegiatan di dalam kelas ditentukan oleh $n(a) = \dfrac{3A+22}{4}$. Keaktifan peserta diklat bergantung pada banyaknya program kegiatan (P) , ditentukan oleh $A(P) = 4P+6$. Jika **Denih** adalah seorang peserta diklat yang mampu melaksanakan 80% dari 25 kegiatan yang ada dalam diklat tersebut, maka nilai yang diperoleh **Denih** adalah ....

   Jawaban : **70**

   Karena $P = 80\% \times 25 = 20$ sehingga

$$\begin{aligned} A(P) &= 4P+6 \\ A(20) &= 4(20)+6 \\ &= 80+6 \\ A(20) &= 86 \end{aligned}$$

   nilai yang diperoleh **Denih** adalah

$$\begin{aligned} n(A) &= \frac{3A+22}{4} \\ n(86) &= \frac{3(86)+22}{4} \\ &= \frac{258+22}{4} \\ &= \frac{280}{4} \\ n(86) &= 70 \end{aligned}$$

2. Jika $f(x) = 2x+3$ dan $(g \circ f)(x) = 6x-5$ maka $g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = ...$

   (a) $\dfrac{1+14x}{3x}; x \neq 0$

   (b) $\dfrac{1-4x}{3x}; x \neq 0$

*HTTPS://WWW.BLOGMATEMATIKA.NET

(c) $\frac{1+x}{3x}; x \neq 0$

(d) $\frac{1-14x}{3x}; x \neq 0$

(e) $\frac{1+4x}{3x}; x \neq 0$

Jawaban : A

Karena diketahui $(g \circ f)(x) = 6x - 5$ maka

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ g(2x+3) &= 6x - 5 \text{........................}(1) \end{aligned}$$

Kita cari invers dari $2x + 3$ terlebih dahulu biar gampang.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= y \\ x &= \frac{y-3}{2} \end{aligned}$$

Kita substitusikan kedalam persamaan (1) agar mendapatkan fungsi $g(x)$

$$\begin{aligned} g(y) &= 6\left(\frac{y-3}{2}\right) - 5 \\ g(y) &= 3y - 9 - 5 \\ &= 3y - 14 \\ g(x) &= 3x - 14 \end{aligned}$$

Sekarang kita cari $g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x - 14 \\ y &= 3x - 14 \\ x &= \frac{y+14}{3} \\ g^{-1}(y) &= \frac{y+14}{3} \\ g^{-1}(x) &= \frac{x+14}{3} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right) + 14}{3} \\ &= \frac{\frac{14x+1}{x}}{3} \\ &= \frac{14x+1}{3x}, x \neq 0 \end{aligned}$$

Alternatif Lain :

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
g(2x+3) &= 6x-5
\end{aligned}
$$

Karena $g(2x+3) = 6x-5$ maka $g^{-1}(6x-5) = 2x+3$. Sekarang kita coba substitusi $x = 1$ hasilnya adalah

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(6x-5) &= 2x+3 \\
g^{-1}(6(1)-5) &= 2(1)+3 \\
g^{-1}(1) &= 5
\end{aligned}
$$

Sekarang kita substitusi dari ke lima option jawaban. Jika hasilnya adalah 5 maka jawaban tersebut benar.

(a) $\frac{1+14x}{3x} = \frac{1+14(1)}{3(1)} = \frac{15}{3} = 5$ **benar**

(b) $\frac{1-4x}{3x} = \frac{1-4(1)}{3(1)} = \frac{-3}{3} = -1$ salah

(c) $\frac{1+x}{3x} = \frac{1+1}{3(1)} = \frac{2}{3}$ salah

(d) $\frac{1-14x}{3x} = \frac{1-14(1)}{3(1)} = \frac{-13}{3}$ salah

(e) $\frac{1+4x}{3x} = \frac{1+4(1)}{3(1)} = \frac{5}{3}$ salah

3. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 6x + k - 1 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Agar $x_1^2 + x_2^2 = 20$, maka nilai k sama dengan ......

(a) 8

(b) 9

(c) 10

(d) 12

(e) 14

Jawaban : B

Karena diketahui $x^2 - 6x + k - 1 = 0$ maka

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 6$
- $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = k - 1$

Karena $(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ sehingga $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 \\
20 &= (6)^2 - 2(k-1) \\
20 &= 36 - 2k + 2 \\
20 &= 38 - 2k \\
20 - 38 &= -2k \\
-18 &= -2k \\
k &= \frac{-18}{-2} \\
k &= 9
\end{aligned}
$$

4. Akar-akar persamaan kuadrat adalah $2x^2 - 5x - 4 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(3x_1 - 1)$ dan $(3x_2 - 1)$ adalah ....

   (a) $2x^2 - 11x + 49 = 0$

   (b) $2x^2 - 11x - 49 = 0$

   (c) $2x^2 + 11x + 49 = 0$

   (d) $2x^2 - 19x - 19 = 0$

   (e) $2x^2 - 19x - 49 = 0$

   Jawaban : B

   Diketahui persamaan kuadrat adalah $2x^2 - 5x - 4 = 0$ sehingga

   - $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$
   - $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{2} = -2$

   Akar-akar yang lain adalah

$$
\begin{aligned}
(3x_1 - 1) + (3x_2 - 1) &= 3x_1 + 3x_2 - 2 \\
&= 3(x_1 + x_2) - 2 \\
&= 3\left(\frac{5}{2}\right) - 2 \\
&= \frac{15}{2} - 2 \\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3x_1-1)\times(3x_2-1) &= 9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1\\
&= 9(-2)-3\left(\frac{5}{2}\right)+1\\
&= -18-\frac{15}{2}+1\\
&= -17-\frac{15}{2}\\
&= -\frac{34}{2}-\frac{15}{2}\\
&= -\frac{49}{2}
\end{aligned}
$$

Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(3x_1-1)$ dan $(3x_2-1)$ adalah

$$
\begin{aligned}
x^2-(x_1+x_2)x+(x_1x_2) &= 0\\
x^2-\frac{11}{2}x-\frac{49}{2} &= 0\\
2x^2-11x-49 &= 0
\end{aligned}
$$

Alternatif Lain :

Karena $2x^2-5x-4=0$ dan akar-akar yang baru adalah $(3x_1-1)$ dan $(3x_2-1)$ identik, maka bisa kita lakukan dengan penghapusan indeks menjadi $3x-1$. Karena invers dari $3x-1$ adalah $\frac{x+1}{3}$ maka kita cukup substitusi $\frac{x+1}{3}$ kedalam persamaan kuadrat $2x^2-5x-4=0$

$$
\begin{aligned}
2x^2-5x-4 &= 0\\
2\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-5\left(\frac{x+1}{3}\right)-4 &= 0\\
2\left(\frac{x^2+2x+1}{9}\right)-\frac{5}{3}(x+1)-4 &= 0\\
\frac{2}{9}\left(x^2+2x+1\right)-\frac{5}{3}(x+1)-4 &= 0\\
2\left(x^2+2x+1\right)-15(x+1)-36 &= 0\\
2x^2+4x+2-15x-15-36 &= 0\\
2x^2-11x-49 &= 0
\end{aligned}
$$

5. Agar persamaan kuadrat $x^2+(m-2)x+9=0$ mempunyai 2 akar kembar, maka nilai m yang memenuhi adalah ....

   (a) $m=-2$ atau $m=-8$

   (b) $m=4$ atau $m=8$

   (c) $m=-4$ atau $m=-8$

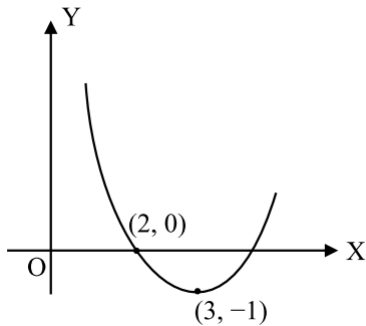
   (d) $m=-4$ atau $m=8$

   (e) $m=4$ atau $m=-8$

   Jawaban : D

Jika persamaan kuadrat $x^2 + (m-2)x + 9 = 0$ mempunyai 2 akar kembar, maka sudah dipastikan $D = 0$ dengan $D = b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} (m-2)^2 - 4(1)(9) &= 0 \\ m^2 - 4x + 4 - 36 &= 0 \\ m^2 - 4m - 32 &= 0 \\ (m-8)(m+4) &= 0 \\ m = 8 \quad \text{atau} \quad m = -4 \end{aligned}$$

6. Diketahui grafik fungsi kuadrat seperti pada gambar.

Koordinat titik potong grafik dengan sumbu Y adalah ....

(a) $(0, 5)$

(b) $(0, 6)$

(c) $(0, 7)$

(d) $(0, 8)$

(e) $(0, 9)$

Jawaban : D

Jika persamaan kuadrat dengan diketahui titik puncak $(3, -1)$ dan melalui titik $(2, 0)$ maka kita bisa menggunakan

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ y &= a(x-3)^2 - 1 \\ 0 &= a(2-3)^2 - 1 \\ 0 &= a(-1)^2 - 1 \\ 0 &= a - 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
y &= (x-3)^2 - 1 \\
y &= (0-3)^2 - 1 \\
y &= (-3)^2 - 1 \\
y &= 9 - 1 \\
y &= 8
\end{aligned}
$$

Koordinat titik potong grafik dengan sumbu Y adalah $(0, 8)$

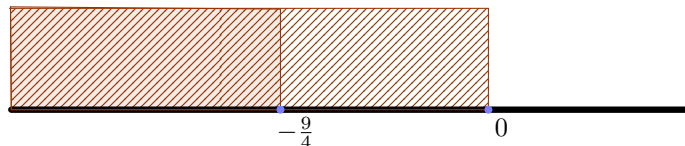
7. Interval nilai p yang menyebabkan fungsi kuadrat $f(x) = px^2 - (2p+3)x + p + 2$ definit negatif adalah ....

   (a) $p < 0$
   (b) $-\frac{9}{4} < p < 0$
   (c) $p < -\frac{9}{4}$
   (d) $0 < p < -\frac{9}{4}$
   (e) $-\frac{5}{2} < p < 0$

   Jawaban : C

   Syarat definit negatif adalah $D < 0$ dan $a < 0$

$$
\begin{aligned}
b^2 - 4ac &< 0 \\
(-(2p+3))^2 - 4(p)(p+2) &< 0 \\
4p^2 + 12p + 9 - 4p^2 - 8p &< 0 \\
4p + 9 &< 0 \\
p &< -\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

   Perhatikan grafik berikut

   Kita lihat grafik diatas, kita dapatkan interval p adalah $p < -\frac{9}{4}$

8. Uang Beny Rp 60.000,00 lebih banyak dari uang Gina ditambah dua kali uang Soffa. Jumlah uang Beny, Gina, dan Soffa adalah Rp 300.000,00. Selisih uang Gina dan Soffa adalah Rp 15.000,00. Uang Beny adalah ....

   (a) Rp 66.000,00

(b) Rp 99.000,00

(c) Rp 153.000,00

(d) Rp 201.000,00

(e) Rp 240.000,00

Jawaban : D

Misalkan Jumlah Uang Beny = **B**

Jumlah Uang Gina = **G**

Jumlah Uang Soffa = **S**

dari keterangan soal di peroleh

$B = G + 2S + 60.000$..............(1)

$B + G + S = 300.000$..............(2)

$G - S = 15.000$........................(3)

Perhatikan persamaan (3)

$$\begin{aligned} G - S &= 15.000 \\ G &= 15.000 + S \text{................(4)} \end{aligned}$$

Persamaan (4) substitusikan kedalam persamaan (2) menjadi

$$\begin{aligned} B + 15.000 + S + S &= 300.000 \\ B + 2S &= 285.000 \end{aligned}$$

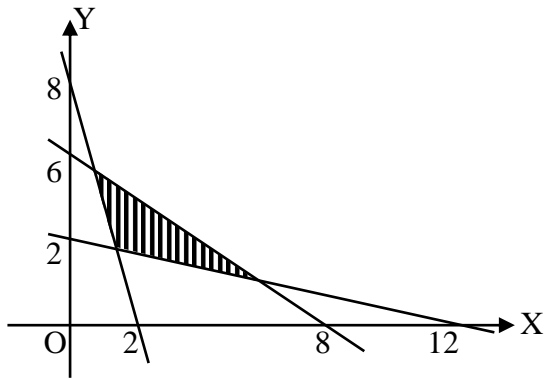
Persamaan (4) substitusikan kedalam persamaan (1) menjadi

$$\begin{aligned} B &= G + 2S + 60.000 \\ B &= 15.000 + S + 2S + 60.000 \\ B &= 3S + 75.000 \\ B - 3S &= 75.000 \text{.....................(5)} \end{aligned}$$

Eliminasi persamaan (4) dan Persamaan (5)

$$\begin{array}{rcl|c|rcl} B + 2S &=& 285.000 & \times 3 & 3B + 6S &=& 855.000 \\ B - 3S &=& 75.000 & \times 2 & 2B - 6S &=& 150.000 \quad + \\ \hline & & & & 5B &=& 1.005.000 \\ & & & & B &=& \dfrac{1.005.000}{5} \\ & & & & B &=& 201.000 \end{array}$$

Uang Beny adalah **Rp 201.000,-**

9. Perhatikan gambar berikut.

Sistem pertidaksamaan linear yang memenuhi daerah arsir adalah ....

(a) $4x + y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$

(b) $4x + y \geq 8, 4x + 3y < 24, 6x + y \geq 12$

(c) $x + 4y \geq 8, 3x + 4y \leq 24.x + 6y \geq 12$

(d) $4x + y \leq 8, 3x + 4y \geq 24, 6x + y \leq 12$

(e) $x + 4y \geq 8, 3x + 4y \geq 24, x + 6y \geq 12$

Jawaban : A

Penyelesaian

Kita selesaikan dulu garis yang pertama

$$\begin{aligned} 8x + 2y &\geq 16 \\ 4x + y &\geq 8................(1) \end{aligned}$$

Kita selesaikan garis yang kedua

$$\begin{aligned} 6x + 8y &\leq 48 \\ 3x + 4y &\leq 24................(2) \end{aligned}$$

Kita selesaikan garis yang ketiga

$$\begin{aligned} 2x + 12y &\geq 24 \\ x + 6y &\geq 12................(2) \end{aligned}$$

Sehingga sistem pertidaksamaan linear yang memenuhi daerah arsir adalah

$$4x + y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$$

10. Luas daerah parkir **1.760** m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2 . Daya tampung maksimum hanya **200** kendaraan, biaya parkir mobil kecil Rp 1.000,00/jam dan mobil besar Rp 2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, maka hasil maksimum tempat parkir itu adalah ....

(a) Rp 176.000,00

(b) Rp 200.000,00

(c) Rp 260.000,00

(d) Rp 300.000,00

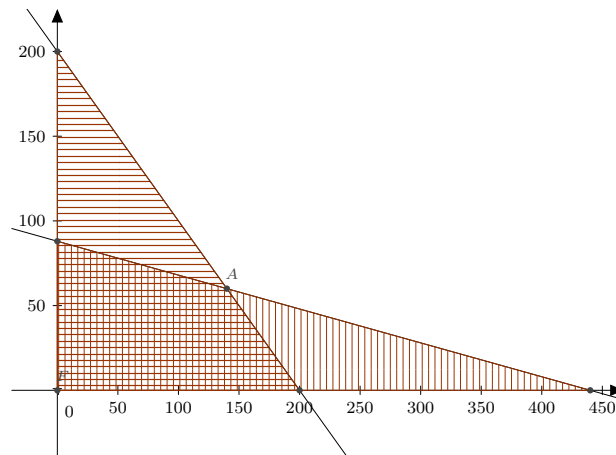
(e) Rp 340.000,00

Jawaban : C

Penyelesaian

Dari keterangan soal kita dapatkan fungsi kendala

$$\begin{aligned} 4x + 20y &\leq 1.760.........(1) \\ x + y &\leq 200.............(2) \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

dan fungsi tujuan $f(x, y) = 1000x + 2000y$ sehingga kita dapatkan grafiknya adalah

Setelah kita lakukan eliminasi kita dapatkan titik potong nya adalah $(140, 60)$

No	(x, y)	$f(x, y) = 1.000x + 2.000y$
1.	$(200, 0)$	$f(200, 0) = 1.000(200) + 2.000(0)$ $= 200.000$
2.	$(140, 60)$	$f(140, 60) = 1.000(140) + 2.000(60)$ $= 140.000 + 120.000$ $= 260.000$
3.	$(0, 88)$	$f(0, 88) = 1.000(0) + 2.000(88)$ $=176.000$

hasil maksimum tempat parkir itu adalah **Rp 260.000**

11. Diketahui matriks-matriks $A = \begin{pmatrix} 2x - 3z & 5 \\ z - 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & z - 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & y \end{pmatrix}$. Jika B^T adalah transpose dari matriks B, dan $A + B^T - C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, maka nilai $x + y + z$ adalah .....

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) -2

(e) -3

Jawaban : E

Untuk matriks $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & z-4 \end{pmatrix}$ sehingga

$$\begin{aligned}
A + B^T - C &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2x-3z & 5 \\ z-3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & z-4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2x-3z+2-2 & 5+1-1 \\ z-3-1+9 & 9+x-4-y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2x-3z & 5 \\ z+5 & 5+z-y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kita dapatkan

- $z + 5 = 4$ maka $z = -1$
- $2x - 3z = 3$ maka $2x - 3(-1) = 3$ sehingga $x = 0$
- $5 + z - y = 6$ maka $5 + (-1) - y = 6$ sehingga $y = -2$

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 0 - 2 - 1 \\
x + y + z &= -3
\end{aligned}$$

12. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $C = AB$. Invers dari matriks C adalah ....

(a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

Jawaban : B

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -16+4 & -12+2 \\ 12-2 & 9-1 \end{pmatrix} \\ A \times B &= \begin{pmatrix} -12 & -10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

karena $A \times B = C$ maka

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{1}{-96+100}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Di sebuah toko bahan bangunan terdapat tumpukan batu bata. Banyak batu bata pada tumpukan paling atas adalah 12 buah dan selalu bertambah 2 buah pada tumpukan di bawahnya. Jika terdapat 40 tumpukan batu bata dari tumpukan bagian atas sampai bawah dan harga setiap batu bata adalah Rp 600,00, maka besarnya biaya yang harus dikeluarkan untuk membeli seluruhnya adalah Rp....

    (Petunjuk: Isi hanya angka saja, tanpa rupiah, tanpa titik dan koma)

    Jawaban : 1224000

    dari soal diatas kita dapatkan

    - $a = 12$
    - $b = 2$
    - $n = 40$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)\,b\right) \\ S_{40} &= \frac{40}{2}\left(2\,(12) + 39\,(2)\right) \\ &= 20\,(24+78) \\ &= 20\,(102) \\ S_{40} &= 2040 \end{aligned}$$

Karena harga setiap batu bata adalah Rp 600,00 maka

$$\begin{aligned} Biaya &= 2.040 \times 600 \\ &= 1.224.000 \end{aligned}$$

besarnya biaya yang harus dikeluarkan untuk membeli seluruhnya adalah Rp 1.224.000

14. Suku ke-n suatu barisan geometri adalah $U_n = 4^n$ Jumlah n suku pertama dari barisan geometri tersebut adalah ....

    (a) $\frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 4\right)$

    (b) $\frac{1}{3}\left(4^{n} - 4\right)$

    (c) $\frac{1}{3}\left(4^{n-1} - 4\right)$

    (d) $\frac{1}{3}\left(4^{n+1} - n\right)$

    (e) $\frac{1}{3}\left(4^{n-1} - n\right)$

    Jawaban : A

    Karena Suku ke-n suatu barisan geometri adalah $U_n = 4^n$ maka

    - $a = U_1 = 4^1 = 4$
    - $U_2 = 4^2 = 16$
    - $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{16}{4} = 4$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\left(r^n - 1\right)}{(r-1)} \\ &= \frac{4\left(4^n - 1\right)}{4-1} \\ &= \frac{4 \cdot 4^n - 4}{3} \\ &= \frac{4^{n+1} - 4}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 4\right) \end{aligned}$$

15. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 5x}{3 - \sqrt{9+x}}$ adalah .....

    (a) 24

    (b) 28

    (c) 30

    (d) 32

    (e) 36

Jawaban : C

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}}\times\left(\frac{3+\sqrt{9+x}}{3+\sqrt{9+x}}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{(2x^2-5x)\left(3+\sqrt{9+x}\right)}{9-(9+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(2x-5)\left(3+\sqrt{9+x}\right)}{9-9-x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(2x-5)\left(3+\sqrt{9+x}\right)}{-x}\\
&= \lim_{x\to 0}-(2x-5)\left(3+\sqrt{9+x}\right)\\
&= -(2(0)-5)\left(3+\sqrt{9+0}\right)\\
&= -(-5)(3+3)\\
&= 5\times 6\\
\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}} &= 30
\end{aligned}$$

16. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-3x-2\right)=$ ......

    (a) -3

    (b) -2

    (c) -1

    (d) 1

    (e) 2

    Jawaban : A

Kita coba dulu menggunakan cara biasa yah. Jangan Pusing duluan.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-3x-2\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-\sqrt{(3x+2)^2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-\sqrt{9x^2+12x+4}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-\sqrt{9x^2+12x+4}\right)\\
&\quad \times\frac{\left(\sqrt{9x^2-6x+7}+\sqrt{9x^2+12x+4}\right)}{\left(\sqrt{9x^2-6x+7}+\sqrt{9x^2+12x+4}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2-6x+7)-(9x^2+12x+4)}{\left(\sqrt{9x^2-6x+7}+\sqrt{9x^2+12x+4}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(9x^2-6x+7-9x^2-12x-4)}{\left(\sqrt{9x^2-6x+7}+\sqrt{9x^2+12x+4}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-18x+3)}{\left(\sqrt{9x^2-6x+7}+\sqrt{9x^2+12x+4}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-18x+3)}{\left(\sqrt{x^2\left(9-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-18x+3)}{\left(x\sqrt{\left(9-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}+x\sqrt{\left(9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-18+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(9-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(-18+\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{\left(9-\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(9+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}\right)}\\
&= \frac{(-18+0)}{\left(\sqrt{(9-0+0)}+\sqrt{(9+0+0)}\right)}\\
&= \frac{-18}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}\\
&= \frac{-18}{3+3}\\
&= \frac{-18}{6}\\
&= -3
\end{aligned}$$

Alternatif lain

Jika $\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}$ dengan nilai $a=p$ maka kita cukup menggunakan rumus singkat $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$. Kita coba saja

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-3x-2\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-\sqrt{(3x+2)^2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-6x+7}-\sqrt{9x^2+12x+4}\right)
\end{aligned}$$

dari langkah kedua diatas, kita sudah bisa langsung menerapkan rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$ karena nilai $a=p=9$

$$\begin{aligned}\frac{b-q}{2\sqrt{a}} &= \frac{-6-12}{2\sqrt{9}}\\ &= \frac{-18}{2\,(3)}\\ &= \frac{-18}{6}\\ &= -3\end{aligned}$$

Mudah kan.

17. Turunan pertama dari $f\,(x)=\frac{3x+5}{-2+x}$, $x\neq 2$ adalah$f'\,(x)$. Nilai $f'\,(1)=$ .....

    (a) -11

    (b) -6

    (c) -5

    (d) -3

    (e) 17

    Jawaban : A
    dengan menggunakan rumus turunan pembagian $f\,(x)=\frac{u}{v}$ maka $f'\,(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ kita coba untuk $u=3x+5$ maka $u'=3$ dan $v=-2+x$ maka $v'=1$

    $$\begin{aligned}f'\,(x) &= \frac{3\,(-2+x)-(3x+5)\,(1)}{(-2+x)^2}\\ &= \frac{-6+3x-3x-5}{(-2+x)^2}\\ f'\,(x) &= \frac{-11}{(-2+x)^2}\end{aligned}$$

    Nilai dari $f'\,(1)$ adalah

    $$\begin{aligned}f'\,(1) &= \frac{-11}{(-2+1)^2}\\ &= \frac{-11}{(-1)^2}\\ &= \frac{-11}{1}\\ f'\,(1) &= -11\end{aligned}$$

18. Fungsi $f\,(x)=x^3+3x^2-9x+10$ naik pada interval ....

    (a) $\{x|x<1 \text{ atau } x>3,\ x\in\mathbb{R}\}$

    (b) $\{x|x<-3 \text{ atau } x>1,\ x\in\mathbb{R}\}$

(c) $\{x|x < -1 \text{ atau } x > 3, x \in \mathbb{R}\}$

(d) $\{x| -3 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$

(e) $\{x|1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$

Jawaban : B

Syarat fungsi naik adalah $f'(x) > 0$. Karena $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$ maka $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ karena $f'(x) > 0$ maka $3x^2 + 6x - 9 > 0$ atau $x^2 + 2x - 3 > 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &> 0 \\ (x-1)(x+3) &> 0 \\ x = 1 \quad \text{atau} &\quad x = -3 \end{aligned}$$

Kita sudah dapatkan titik kritis -3 dan 1. Kita masukkan kedalam garis bilangan seperti di bawah ini

Dari grafik diatas kita uji bilangan diantara titik kritis tersebut dan mendapatkan nilai positif atau disebut fungsi naik pada interval

$$x < -3 \text{ atau } x > 1$$

19. Yuniati membeli minyak goreng dalam kemasan plastik pada suatu minimarket. Ia ingin memasukkan minyak goreng tersebut pada sebuah tabung tanpa tutup yang permukaannya terbuat dari lempengan seng tipis. Ternyata tabung tanpa tutup dengan luas permukaan 2π cm^2 adalah tabung tanpa tutup dengan luas terkecil yang dapat memuat minyak goreng sebanyak 8π cm^3. Maka nilai k adalah ....

Jawaban : 12

Dari keterangan soal kita peroleh bahwa $V = 8\pi$. Karena volume tabung adalah $V = \pi r^2 t$ maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} V &= 8\pi \\ \pi r^2 t &= 8\pi \\ r^2 t &= 8 \\ t &= \frac{8}{r^2} \end{aligned}$$

padhal kita memiliki luas permukaan tabung tanpa tutup adalah

$$\begin{aligned} L_p &= \pi r^2 + 2\pi r t \\ &= \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{8}{r^2}\right) \\ L_P &= \pi r^2 + \frac{16\pi}{r} \end{aligned}$$

Karena tabung tanpa tutup dengan luas terkecil maka $L'_p = 0$

$$\begin{aligned} L_P &= \pi r^2 + \frac{16\pi}{r} \\ L'_p &= 2\pi r - \frac{16\pi}{r^2} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 2\pi r - \frac{16\pi}{r^2} &= 0 \\ 2\pi r &= \frac{16\pi}{r^2} \\ r^3 &= 8 \\ r &= \sqrt[3]{8} \\ r &= 2 \end{aligned}$$

karena $t = \frac{8}{r^2}$ maka $t = \frac{8}{2^2} = 2$.
dalam soal disebutkan juga bahwa luas permukaan adalah $k\pi$ maka

$$\begin{aligned} L_P &= \pi r^2 + \frac{16\pi}{r} \\ k\pi &= \pi r^2 + \frac{16\pi}{r} \\ k\pi &= \pi\left(2^2\right) + \frac{16\pi}{2} \end{aligned}$$

kita bagi semua dengan π maka menjadi

$$\begin{aligned} k\pi &= \pi\left(2^2\right) + \frac{16\pi}{2} \\ k\pi &= 4\pi + 8\pi \\ k &= 4 + 8 \\ k &= 12 \end{aligned}$$

20. Suatu persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 14x + 4$ yang sejajar dengan garis $4x - y + 6 = 0$ adalah ....

    (a) $y - 4x + 23 = 0$
    (b) $y - 4x - 23 = 0$
    (c) $y - 4x + 1 = 0$
    (d) $4y - 4x - 23 = 0$
    (e) $4y - 4x + 23 = 0$

Jawaban : A

Perhatikan garis $4x - y + 6 = 0$ dapat kita tuliskan $y = 4x + 6$ sehingga kita dapatkan gradien garis adalah $m = 4$. Karena posisinya sejajar, maka gradiennya sama. Dari kurva $y = 3x^2 - 14x + 4$ kita

dapatkan

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 14x + 4 \\ y' &= 6x - 14 \end{aligned}$$

karena turunan pertama (y') adalah gradien dan posisinya sejajar maka kita gunakan $m = 4$

$$\begin{aligned} y' &= 6x - 14 \\ 4 &= 6x - 14 \\ 6x &= 18 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Untuk $x = 3$ maka

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 14x + 4 \\ y &= 3(3)^2 - 14(3) + 4 \\ y &= 3(9) - 42 + 4 \\ &= 27 - 42 + 4 \\ y &= -11 \end{aligned}$$

Persamaan garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-11) &= 4(x - 3) \\ y + 11 &= 4x - 12 \\ y - 4x + 23 &= 0 \end{aligned}$$

21. Hasil dari $\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{(6x-4x^2)^2}} dx = ...$

 (a) $\frac{1}{6}\sqrt[3]{6x-4x^2} + C$
 (b) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{6x-4x^2} + C$
 (c) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6x-4x^2} + C$
 (d) $3\sqrt[3]{6x-4x^2} + C$
 (e) $6\sqrt[3]{6x-4x^2} + C$

 Jawaban : C

 Menyelesaikan soal integral harus sabar yah. Kita misalkan

$u = 6x - 4x^2$ maka $du = 6 - 8x\,dx$ kita modifikasi sedikit menjadi $-\frac{1}{2}du = 4x - 3\,dx$ sehingga bentuk integralnya menjadi

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{(6x-4x^2)^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{2}{3}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{3}}u^{\frac{1}{3}} + C \\
&= -\frac{1}{2} \times 3u^{\frac{1}{3}} + C \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{6x-4x^2} + C
\end{aligned}$$

22. Diketahui $\int_2^3 \left(3x^2 - ax + 5\right) dx = -6$ Nilai a yang memenuhi adalah ....

 (a) 3
 (b) 6
 (c) 12
 (d) 24
 (e) 48

 Jawaban : C

 Masih tentang integral lagi. Langsung kita integralkan saja fungsi sebelah kiri

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \left(3x^2 - ax + 5\right) dx &= -6 \\
\left[x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 5x\right]_2^3 &= -6 \\
\left[\left(3^3 - \frac{a}{2}(3)^2 + 5(3)\right) - \left((2)^3 - \frac{a}{2}(2)^2 + 5(2)\right)\right] &= -6 \\
\left[\left(27 - \frac{9a}{2} + 15\right) - (8 - 2a + 10)\right] &= -6 \\
24 - \frac{9a}{2} + 2a &= -6 \\
-\frac{5a}{2} &= -30 \\
-5a &= -60 \\
a &= \frac{-60}{-5} \\
a &= 12
\end{aligned}$$

23. Seorang pria berdiri di atas menara pada ketinggian tertentu. Pria tersebut mengamati sebuah truk dengan sudut depresi α . Ketika nilai $\tan\alpha = 1$, terlihat bahwa truk bergerak maju menuju

dasar menara. Sepuluh menit kemudian, sudut depresi dari truk berubah menjadi β , dengan nilai $\tan\beta = 5$. Jika truk bergerak dengan kecepatan tetap, waktu yang dibutuhkan truk untuk mencapai dasar menara adalah ....

(a) 100 detik

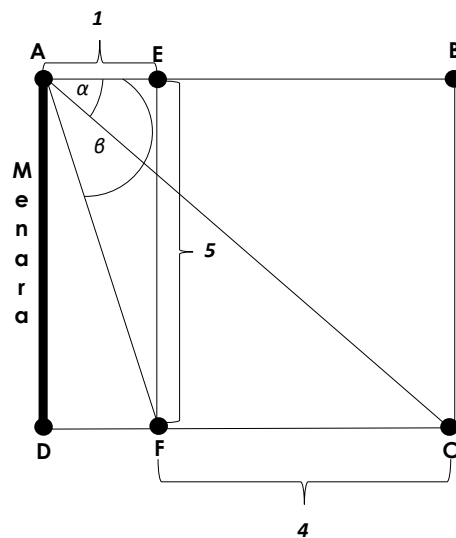
(b) 150 detik

(c) 200 detik

(d) 250 detik

(e) 300 detik

Jawaban : B

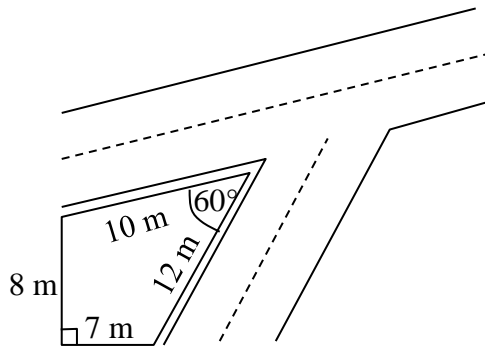
Sebelum kita menjawab soal diatas terlebih dahulu kita buat gambar sketsa sebagai berikut

$\tan\alpha = 1$ maka panjang $BC = AB = 1$

$\tan\beta = 5$ maka panjang $EF = 5$ dan Panjang $AE = DF = 1$. Jelas bahwa panjang $EB = FC = 4$. Perjalanan dari C ke F membutuhkan waktu 10 menit. Karena kecepatannya tetap, maka kita bisa gunakan perbandingan biasa yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\text{Panjang } FC}{\text{Panjang } DF} &= \frac{\text{waktu tempuh } FC}{\text{waktu tempuh } DF} \\ \frac{4}{1} &= \frac{10 \text{ menit}}{DF} \\ DF &= \frac{10}{4}\end{aligned}$$

Karena dalam satuan detik, maka

$$\begin{aligned}DF &= \frac{10}{4} \times 60 \text{ detik} \\ &= 150 \text{ detik}\end{aligned}$$

24. Tanah Pak Agus terletak di suatu sudut pertigaan jalan seperti pada gambar berikut.

Karena sangat membutuhkan uang untuk naik haji, maka Pak Agus berencana menjual tanahnya. Pak Agus ingin mengukur luas tanahnya tersebut. Maka luas tanah Pak Agus adalah ....

(a) 58 m^2

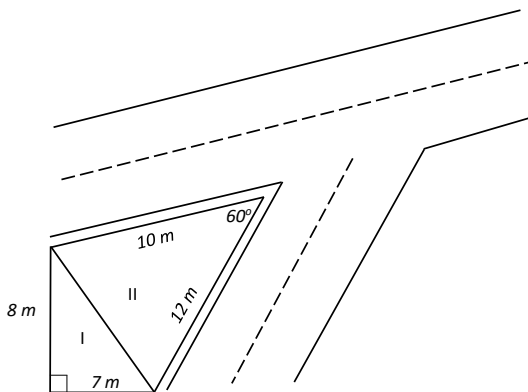
(b) 68 m^2

(c) $\left(28 + 30\sqrt{3}\right)\text{m}^2$

(d) $58\sqrt{3} \text{ m}^2$

(e) $\left(28 + 60\sqrt{3}\right)\text{m}^2$

Jawaban : C

Perhatikan gambar berikut

Kita bagi lahan tersebut menjadi 2 bagian yaitu Luas I dan Luas II

Luas I dapat kita hitung dengan menggunakan Luas segitiga biasa

$$\begin{aligned} L_I &= \frac{a \times t}{2} \\ &= \frac{7 \times 8}{2} \\ &= 28 \end{aligned}$$

Luas II dapat kita hitung dengan menggunakan rumus

$$\begin{aligned} L_{II} &= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 \times \sin 60^\circ \\ &= 60 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sehingga luas tanah Pak Agus adalah Luas **I** + Luas **II**

$$L_I + L_{II} = 28 + 30\sqrt{3}$$

25. Diketahui $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{3}$ dan $(\alpha - \beta) = \frac{5\pi}{6}$. Nilai $\sin(\alpha + \beta)$ adalah .....

(a) $-\frac{1}{3}$

(b) $-\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{1}{3}$

(e) $\frac{1}{2}$

Jawaban : C

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \quad + \\
\hline
\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta \\
\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= 2\times\frac{1}{3} \\
\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2} &= \frac{2}{3} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

26. Nilai x yang memenuhi saat fungsi $f(x) = -2\cos 3x + \sqrt{3}$ memotong sumbu X pada interval $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$ adalah ....

(a) 105°

(b) 130°

(c) 140°

(d) 150°

(e) 175°

Jawaban : B

Perhatikan fungsi $f(x) = -2\cos 3x + \sqrt{3}$. karena memotong sumbu X maka $f(x) = 0$

$$\begin{aligned}
-2\cos 3x + \sqrt{3} &= 0 \\
2\cos 3x &= \sqrt{3} \\
\cos 3x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 3x &= \cos 30^\circ
\end{aligned}$$

sekarang kita gunakan rumus untuk $\cos x = \cos\alpha$ yaitu $x = \pm\alpha + k \cdot 360°$. karena $\alpha = 60°$ maka

$$\begin{aligned} x &= \pm\alpha + k \cdot 360° \\ 3x &= \pm 60° + k \cdot 360° \end{aligned}$$

kita bagi semua dengan 3 menjadi

$$x = \pm 10° + k \cdot 120°$$

Sekarang kita cari satu persatu nilai x dengan menggunakan nilai $k = 1, 2, 3, ...$

- Untuk $k = 0$ maka

$$\begin{aligned} x_1 &= 10° + (0) \cdot 120° \\ &= 10° \\ x_2 &= -10° + (0) \cdot 120° \\ &= -10° \end{aligned}$$

  untuk $k = 0$ Kita dapatkan $x_1 = 10°$ dan $x_2 = -10°$. Karena interval $90° \leq x \leq 180°$ maka kedua nilai x untuk $k = 0$ tidak memenuhi.

- Untuk $k = 1$ maka

$$\begin{aligned} x_1 &= 10° + (1) \cdot 120° \\ &= 130° \\ x_2 &= -10° + (1) \cdot 120° \\ &= 110° \end{aligned}$$

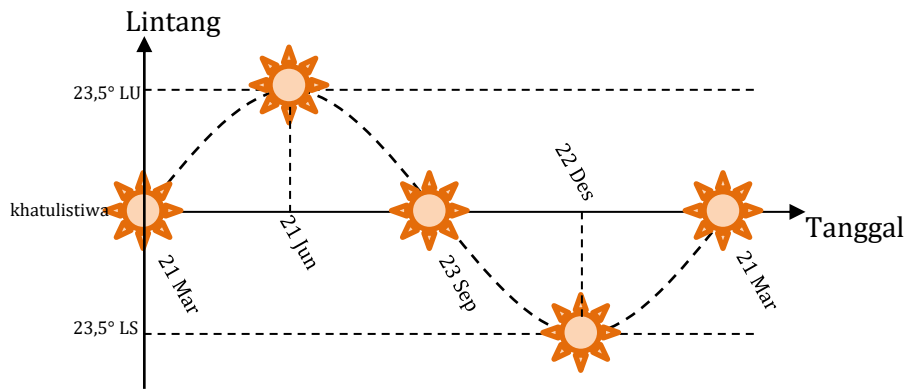
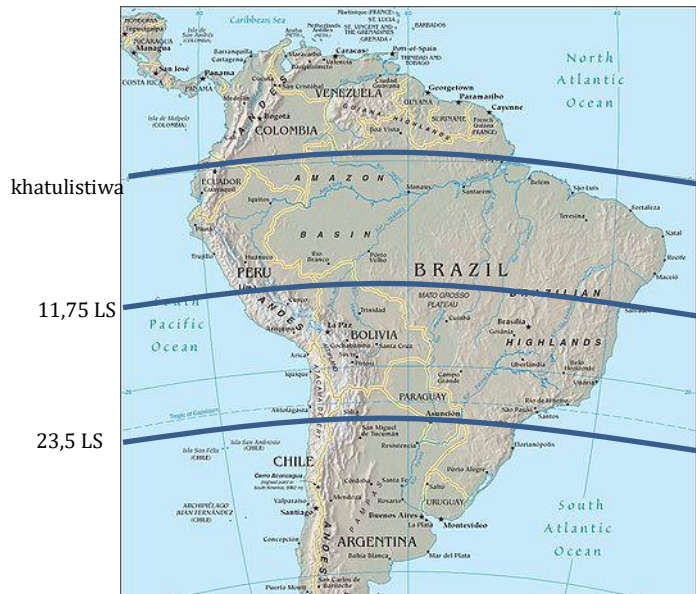
  untuk $k = 1$ Kita dapatkan $x_1 = 130°$ dan $x_2 = 110°$. Karena interval $90° \leq x \leq 180°$ maka kedua nilai x untuk $k = 1$ **memenuhi.**

- Untuk $k = 2$ maka

$$\begin{aligned} x_1 &= 10° + (2) \cdot 120° \\ &= 250° \\ x_2 &= -10° + (2) \cdot 120° \\ &= 230° \end{aligned}$$

  untuk $k = 2$ Kita dapatkan $x_1 = 250°$ dan $x_2 = 230°$. Karena interval $90° \leq x \leq 180°$ maka kedua nilai x untuk $k = 2$ tidak memenuhi.

Berdasarkan pilihan jawaban, nilai yang memenuhi adalah 130°

27. Perhatikan gambar berikut !

Gambar a

Gambar b

Gambar (a) menunjukkan gerak semu matahari adalah kedudukan matahari sepanjang tahun dilihat dari Bumi. Pada tanggal 21 Maret dan 23 September, matahari akan berada di atas khatulistiwa. Pada tanggal 21 Juni, matahari akan berada di daerah belahan bumi utara dengan garis lintang 23,5° LU. Sedangkan pada tanggal 22 Desember, matahari akan berada di daerah belahan bumi selatan dengan garis lintang 23,5° LS. Jika gerak semu matahari merupakan **grafik sinusoidal** seperti pada gambar di atas dan gambar (b) menunjukkan kota Lima, ibu kota negara Peru, terletak di koordinat 11,75° LS, maka diperkirakan matahari akan tepat berada di atas kota **Lima** pada pukul 12 siang pada tanggal . . . .

(a) 8 Oktober

(b) 13 Oktober

(c) 23 Oktober

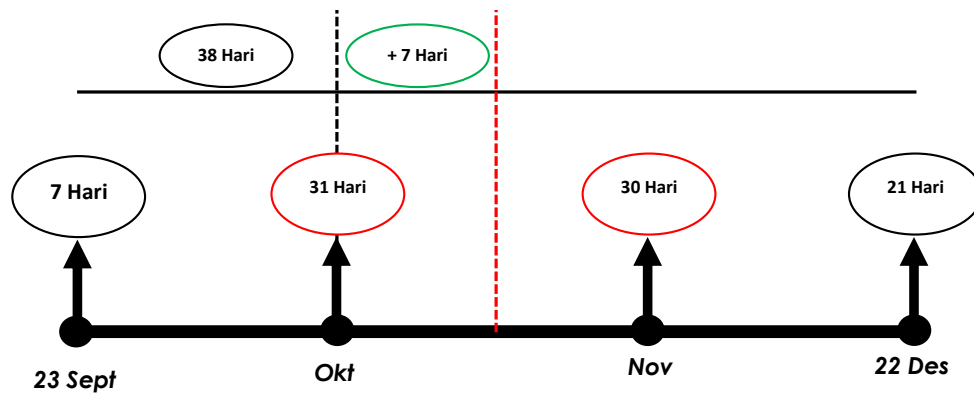
(d) 7 November

(e) 22 November

Jawaban : D

Soal ini berada pada kategori **HOTS**. Tetapi kita bisa menyelesaikannya dengan mudah dengan melihat petunjuk pada soal.

Karena kota Peru berada pada posisi $11,75° \, LS$ yakni antara garis khatulistiwa dan garis $23,5° \, LS$. Jika kita lihat grafik (a) pada soal kita bisa sedikit mengambil petunjuk bahwa matahari tepat berada di atas kota Lima diantara **23** september dan **22** Desember.

Sekarng kita perhatikan grafik berikut

dari grafik diatas, terlihat bahwa 23 September berjumlah 7 hari, Bulan Oktober 31 Hari, Bulan November 30 Hari dan 22 Desember sebanyak 21 Hari. Jika kita jumlahkan maka diantara 23 september dan 22 Desember sebanyak 89 hari. Setengah dari 89 hari adalah 45 hari.

Jadi, 45 hari setelah 23 september adalah tanggal 7 November.

28. Adi dan Budi merupakan sahabat karib. Malam itu mereka berada di rumah masing-masing. Jarak kedua rumah adalah **2** km. Adi mengirim pesan singkat kepada Budi bahwa dia sedang berdiri menghadap rumah Budi dan bermain pistol laser hijau yang kuat dan ditembakkan dengan sudut elevasi 75° ke awan yang berada di langit antara kedua rumahnya sehingga mengenai awan. Budi beranjak berdiri di depan rumah sambil mengamati titik hijau di awan menggunakan klinometer dan terbaca sudut yang terbentuk 45°. Maka tinggi awan yang ditembak Adi adalah ....

    (a) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$ km

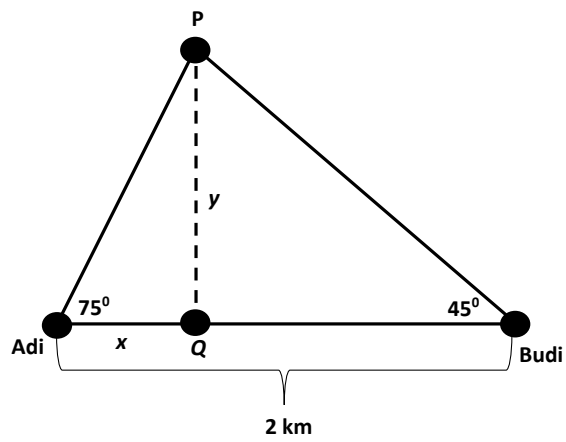
    (b) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$ km

    (c) $\frac{1}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)$ km

    (d) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$ km

    (e) $\left(\sqrt{3}+1\right)$ km

    Jawaban : D

    Kalau kita melihat soal ini, kita bisa membuat sketsa gambar berikut

Kita lihat grafik diatas, kita melihat jarak titik Q dengan Adi adalah $2 - x$. Misalkan tinggi awan adalah jarak antara titik P dan titik Q maka panjang PQ bisa kita hitung dengan rumus tangen.

$$\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \frac{y}{2-x} \\ 1 &= \frac{y}{2-x} \\ y &= 2-x \\ x &= 2-y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ &= \frac{y}{x} \\ \tan 75^\circ &= \frac{y}{2-y} \end{aligned}$$

Terlebih dahulu kita cari nilai $\tan 75^\circ$ dengan rumus $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$$\begin{aligned}
\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\
&= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\
&= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} \\
&= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{6\left(2+\sqrt{3}\right)}{6} \\
&= 2 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Karena $\tan 75^\circ = \dfrac{y}{2-y}$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{y}{2-y} &= 2 + \sqrt{3} \\
y &= 4 - 2y + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}y \\
y + 2y + \sqrt{3}y &= 4 + 2\sqrt{3} \\
3y + \sqrt{3}y &= 4 + 2\sqrt{3} \\
y\left(3 + \sqrt{3}\right) &= 4 + 2\sqrt{3} \\
y &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

kita sederhanakan menjadi

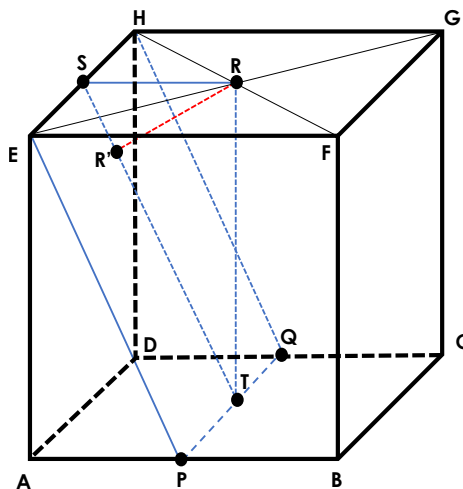
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{4+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{12-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6}{9-3} \\
&= \frac{6+2\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

tinggi awan yang ditembak Adi adalah $\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)$

29. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk a . Titik-titik P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan titik R merupakan titik perpotongan garis EG dan garis FH. Jarak titik R ke bidang $EPQH$ adalah ....

    (a) $\frac{a}{5}$
    (b) $\frac{a}{3}$
    (c) $\frac{a}{5}\sqrt{5}$
    (d) $\frac{a}{3}\sqrt{3}$
    (e) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

    Jawaban : C

    Sebelum kita mengerjakan soal diatas, kita buat dulu proyeksi gambar kubus $ABCD.EFGH$

Berdasarkan proyeksi gambar diatas, Jarak titik R ke bidang $EPQH$ adalah jarak antara titik R ke titik R'. Jika panjang rusuknya adalah a maka panjang $SR = \frac{1}{2}a$ dan panjang $RT = a$. Kita cari

panjang ST dulu.

$$\begin{aligned} ST &= \sqrt{SR^2 + RT^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \\ &= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Kita dapatkan panjang $ST = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Kembali kita perhatikan segitiga SRT. Karena luas segitiga adalah $\frac{1}{2} \times$ alas $\times$ tinggi maka Luas segitiga SRT adalah $\frac{1}{2} \times SR \times RT = \frac{1}{2} \times ST \times RR'$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times SR \times RT &= \frac{1}{2} \times ST \times RR' \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times a &= \frac{1}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{5} \times RR' \\ \frac{1}{4}a^2 &= \frac{1}{4}a\sqrt{5} \times RR' \\ RR' &= \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a\sqrt{5}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ RR' &= \frac{a\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Jadi, Jarak titik R ke bidang $EPQH$ adalah $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

30. Diketahui limas beraturan $T.ABCD$ dengan panjang rusuk tegak 8 cm dan panjang rusuk alas 4 cm. Jarak titik A ke TC adalah ....

    (a) $\sqrt{14}$ cm

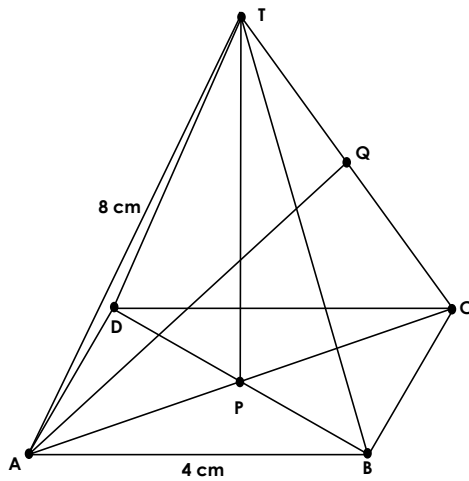
    (b) $\sqrt{28}$ cm

    (c) $2\sqrt{14}$ cm

    (d) $3\sqrt{14}$ cm

    (e) $2\sqrt{28}$ cm

    Jawaban : B

    Perhatikan gambar berikut

Pertama kita mencari dulu panjang AC

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} \\ &= \sqrt{32} \\ AC &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Karena $AC = 4\sqrt{2}$ maka Panjang $PC = 2\sqrt{2}$. Kemudian kita cari panjang TP

$$\begin{aligned} TP &= \sqrt{TC^2 - PC^2} \\ &= \sqrt{8^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{64 - 8} \\ &= \sqrt{56} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

Perhatikan segitiga TAC. Luas segitiga TAC bisa dihitung dengan cara

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times TC \times AQ &= \frac{1}{2} \times AC \times TP \\ \frac{1}{2} \times 8 \times AQ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{14} \\ 8AQ &= 8\sqrt{28} \\ AQ &= \frac{8\sqrt{28}}{8} \\ AQ &= \sqrt{28} \end{aligned}$$

Jarak titik A ke TC adalah $\sqrt{28}$

31. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$ yang sejajar dengan garis $12x - 5y + 20 = 0$ adalah ....

    (a) $5y - 12x - 78 = 0$

(b) $5y - 12x - 52 = 0$

(c) $5y - 12x = 0$

(d) $5y - 12x + 52 = 0$

(e) $5y - 12x + 78 = 0$

Jawaban : C

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ yang sejajar dengan garis $ax+by+c=0$ adalah

$$y - b = m\left(x - a\right) \pm r\sqrt{m^2+1}$$

Perhatikan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$. Kita dapatkan titik Pusatnya adalah $P\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ dengan $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - C}$. Karena nilai $a = 10$, $b = -2$ dan $C = 1$ kita dapatkan titik pusatnya adalah $P\left(-5, 1\right)$dan

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-5\right)^2 + 1^2 - 1} \\ &= \sqrt{25 + 1 - 1} \\ &= \sqrt{25} \\ r &= 5 \end{aligned}$$

Perhatikan garis $12x - 5y + 20 = 0$. Kita cari gradien garis tersebut adalah

$$\begin{aligned} 12x - 5y + 20 &= 0 \\ 5y &= 12x + 20 \\ y &= \frac{12}{5}x + 4 \end{aligned}$$

gradien garis $12x - 5y + 20 = 0$ adalah $m = \frac{12}{5}$. Karena dalam soal disebutkan sejajar dengan garis $12x - 5y + 20 = 0$, maka $m_1 = m_2 = \frac{12}{5}$. Sekarang kita akan mencari gradien garis yang ditanyakan

dalam soal

$$\begin{aligned}
y-b &= m(x-a)\pm r\sqrt{m^2+1}\\
y-1 &= \frac{12}{5}(x+5)\pm 5\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+1}\\
y-1 &= \frac{12}{5}(x+5)\pm 5\sqrt{\frac{144}{25}+1}\\
y-1 &= \frac{12}{5}(x+5)\pm 5\sqrt{\frac{169}{25}}\\
y-1 &= \frac{12}{5}(x+5)\pm 5\left(\frac{13}{5}\right)\\
y-1 &= \frac{12}{5}(x+5)\pm 13 \quad \text{kita kalikan 5}\\
5y-5 &= 12x+60\pm 65\\
5y-12x-65\pm 65 &= 0
\end{aligned}$$

- Garis singgung I adalah $5y-12x-65+65=0$ atau $5y-12x=0$ **(jawaban)**
- Garis singgung II adalah $5y-12x-65-65=0$ atau $5y-12x-130=0$

32. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-1,2)$ dan menyinggung garis $x+y+7=0$ adalah ....

(a) $x^2+y^2+2x+4y-27=0$

(b) $x^2+y^2+2x-4y-27=0$

(c) $x^2+y^2+2x-4y-32=0$

(d) $x^2+y^2+4x-2y-32=0$

(e) $x^2+y^2-4x+2y-7=0$

Jawaban : B

Pusat lingkaran adalah $(-1,2)$dan menyinggung garis $x+y+7=0$. Kita cari jari-jari lingkaran tesebut

$$\begin{aligned}
r &= \left|\frac{-1+2+7}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|\\
&= \left|\frac{8}{\sqrt{2}}\right|\\
r &= \frac{8}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Persamaan lingkaran jika diketahui titik pusat dan jari-jari adalah $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{aligned}(x+1)^2+(y-2)^2 &= \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2\\ x^2+2x+1+y^2-4x+4 &= 32\\ x^2+y^2+2x-4x+5 &= 32\\ x^2+y^2+2x-4x+5-32 &= 0\\ x^2+y^2+2x-4x+-27 &= 0\end{aligned}$$

33. Diketahui bayangan titik A oleh transformasi rotasi sebesar 270° berlawanan jarum jam dengan pusat $(-2,1)$ adalah $A'(7,-3)$. Koordinat titik A adalah ....

    (a) $(11,-3)$
    (b) $(2,-8)$
    (c) $(2,10)$
    (d) $(-6,-8)$
    (e) $(-6,10)$

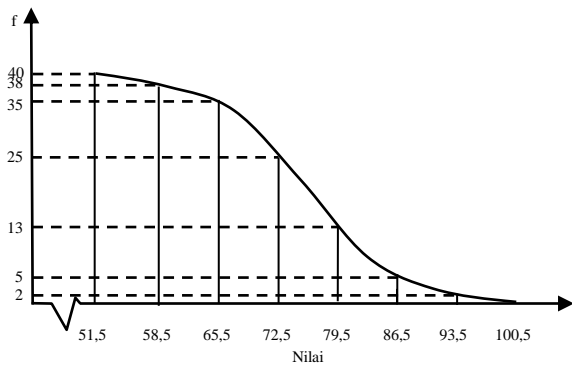
    Jawaban : C

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos 270^\circ & -\sin 270^\circ\\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & -(-1)\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}y-1\\-(x+2)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}y-1\\-x-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}y-1 &= 9\\ y &= 10\\ -x-2 &= -4\\ x &= 2\end{aligned}$$

Koordinat titik A adalah $(2,10)$

34. Hasil penilaian harian Matematika dari **40** orang siswa disajikan dalam ogive negatif berikut.

Hasil penilaian harian siswa adalah bilangan bulat dari **0** sampai **100**. Siswa yang memperoleh nilai lebih dari atau sama dengan 75 akan mengikuti program pengayaan, sedangkan sisanya harus mengikuti program remedial. Pernyataan berikut yang benar adalah ....

(a) Siswa yang remedial lebih banyak dari siswa yang tidak remedial

(b) $12,5\%$ siswa memiliki nilai kurang dari **86**

(c) $62,5\%$ siswa memiliki nilai kurang dari **71**

(d) Selisih banyak siswa yang remedial dan tidak remedial adalah **2** siswa

(e) **13** siswa mendapatkan nilai $79,5$

Jawaban : A

Kalau kita melihat soal ini, tentu kurang terbiasa membaca ogive. Soal ini saya kategorikan soal HOTS mengingat selama ini kita jarang mendapatkan soal model penyajian data bentuk Ogive. Tetapi kita bisa kita sajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi sebagai berikut.

Interval	**frekuensi**
$52-58$	2
$59-65$	3
$66-72$	10
$73-79$	12
$80-86$	8
$87-93$	3
$99-100$	2
Jumlah	40

dari tabel distribusi frekuensi diatas, kita bisa langsung eksekusi jawabannya.

(a) Siswa yang remedial lebih banyak dari siswa yang tidak remedial (Kemungkinan Benar)

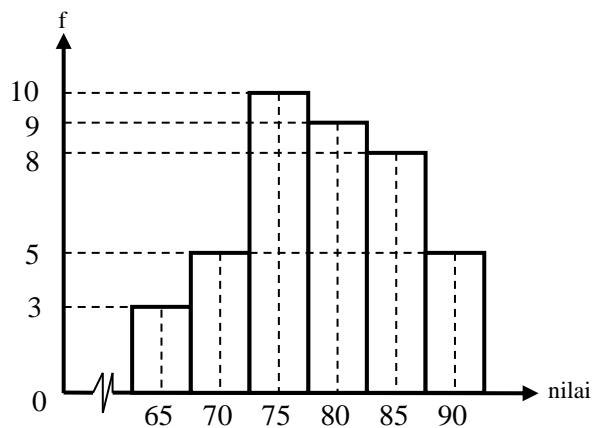
(b) $12,5\%$ siswa memiliki nilai kurang dari **86** (Salah)

(c) $62,5\%$ siswa memiliki nilai kurang dari **71** (Salah)

(d) Selisih banyak siswa yang remedial dan tidak remedial adalah **2** siswa (Salah)

(e) **13** siswa mendapatkan nilai $79,5$ (Salah)

Belum yakin juga sih jawabannya. Tapi kalau secara tabel kurang lebih jawabannya adalah A karena Siswa yang remedial lebih banyak dari siswa yang tidak remedial

35. Nilai ulangan harian Matematika dari suatu kelas disajikan dengan histogram seperti pada gambar di bawah ini.

Modus dari data pada histogram tersebut adalah ....

(a) $76,00$

(b) $76,33$

(c) $76,67$

(d) $76,76$

(e) $77,00$

Jawaban : C

Karena pada grafik dimulai dari titik tengah $65-70$ maka kita bisa susun angkanya menjadi $65, 66, 67, 68, 69, 70$. Jika kita geser 2 angka ke belakang maka intervalnya menjadi

Nilai	Frekuensi
$63-67$	**3**
$68-72$	**5**
$73-77$	**10**
$78-82$	**9**
$83-87$	**8**
$88-92$	**5**
Jumlah	40

Karena modus adalah data yang sering muncul atau dengan kata lain data dengan frekuensi terba-

nyak, maka modus terletak pada interval $73 - 77$

$$\begin{aligned} Mo &= Bb + P\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) \\ &= 72,5 + 5\left(\frac{5}{5+1}\right) \\ &= 72,5 + 5\left(\frac{5}{6}\right) \\ &= 72,5 + 5\,(0,83) \\ &= 72,5 + 4,16 \\ &= 76,66 \end{aligned}$$

36. Perhatikan data pada tabel berikut !

Nilai	**Frekuensi**
$30 - 39$	**1**
$40 - 49$	**3**
$50 - 59$	**11**
$60 - 69$	**21**
$70 - 79$	**43**
$80 - 89$	**32**
$90 - 99$	**9**

Kuartil bawah dari data pada tabel tersebut adalah ....

(a) **66,0**

(b) **66,1**

(c) **66,2**

(d) **66,6**

(e) **66,9**

Jawaban : D

Nilai	**Frekuensi**
$30 - 39$	**1**
$40 - 49$	**3**
$50 - 59$	**11**
$60 - 69$	**21** (Q_1)
$70 - 79$	**43**
$80 - 89$	**32**
$90 - 99$	**9**
Jumlah	**120**

Karena Kuartil bawah adalah

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{4} \times n \\ &= \frac{1}{4} \times 120 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Maka Q_1 berada pada interval $60 - 69$ sehingga

$$\begin{aligned} Q_1 &= Bb + P \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \times n\right) - f_{kum}}{f} \right) \\ &= 59,5 + 10 \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \times 120\right) - 15}{21} \right) \\ &= 59,5 + 10 \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \times 120\right) - 15}{21} \right) \\ &= 59,5 + 10 \left(\frac{30 - 15}{21} \right) \\ &= 59,5 + 10 \left(\frac{15}{21} \right) \\ &= 59,5 + 10\,(0,714) \\ &= 59,5 + 7,14 \\ &= 66,64 \end{aligned}$$

37. Banyak bilangan antara **2.000** sampai **6.000** yang dapat disusun dari angka **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7** dan tidak ada angka yang sama adalah ....

    (a) **1.680**

    (b) **1.470**

    (c) **1.260**

    (d) **1.050**

    (e) **840**

    Jawaban : E

    dari susunan angka **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,** dapat disusun bilangan antara **2.000** sampai **6.000** adalah sebagai berikut

    - Angka Ribuan yang memenuhi adalah 2,3,4,5 (sebanyak 4 angka)
    - Angka Ratusan yang memenuhi adalah semua angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**.** Tetapi dengan syarat tidak ada angka berulang, maka yang memenuhi hanya 7 angka
    - Angka puluhan yang memenuhi juga semua angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tetapi sudah digunakan untuk bilangan ribuan dan ratusan, maka yang memenuhi adalah 6 angka

- Angka satuan yang memenuhi juga semua angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Tetapi sudah digunakan untuk bilangan ribuan, ratusan, dan puluhan. maka yang memenuhi adalah 5 angka.

Jadi, bilangan yang dapat disusun adalah

$$4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$$

38. Seusai pertandingan, tim basket yang terdiri dari **5** orang pemain akan berfoto bersama pelatih. Banyak cara mereka dapat berfoto Bersama apabila posisi pelatih harus berada di paling kiri atau paling kanan adalah .... cara

Jawaban : 240

Perhatikan ilustrasi berikut

Pelatih	1	2	3	4	5	Pelatih berada paling kiri
1	2	3	4	5	Pelatih	Pelatih berada paling kanan

- Jika pelatih berada paling kiri, maka banyaknya cara berfoto sebanyak $5! = 120$
- Jika pelatih berada paling kanan, maka banyaknya cara berfoto juga sebanyak $5! = 120$

Sehingga banyak cara mereka dapat berfoto Bersama apabila posisi pelatih harus berada di paling kiri atau paling kanan adalah $120 + 120 = 240$ cara

39. Seorang murid diminta menyelesaikan **14** soal dari **23** soal, tetapi nomor ganjil harus dikerjakan. Banyaknya pilihan berbeda yang dapat diambil adalah ....

(a) **52**

(b) **53**

(c) **54**

(d) **55**

(e) **56**

Jawaban : D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23							

Karena jumlah soal bernomor ganjil berjumlah 12 nomor, maka kita tinggal mencari 2 nomor lagi dari seluruh nomor genap. Jumlah nomor genap ada 11 nomor sehingga kita tinggal mencari 2 nomor dari 11 nomor genap dengan kombinasi

$$\begin{aligned} {}_{11}C_2 &= \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 2!} \\ &= 55 \end{aligned}$$

40. Dalam kotak A terdapat **4** bola merah dan **6** bola putih. Dalam kotak B terdapat **3** bola merah dan **5** bola putih. Sebuah bola diambil secara acak dari masing-masing kotak. Peluang terambil bola merah dari kotak A dan bola putih dari kotak B adalah ....

    (a) $\frac{1}{4}$

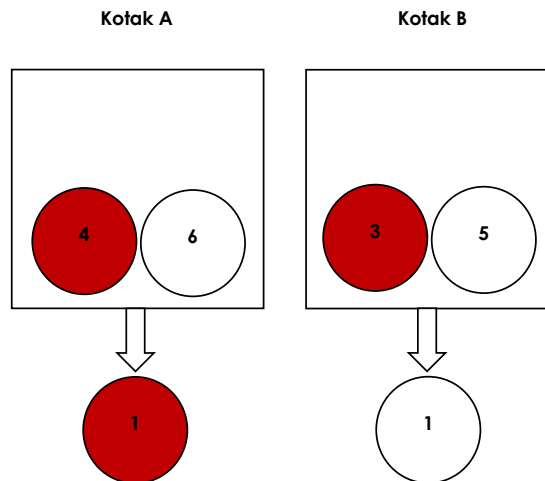
    (b) $\frac{2}{5}$

    (c) $\frac{1}{2}$

    (d) $\frac{3}{5}$

    (e) $\frac{3}{4}$

    Jawaban : A

    Perhatikan gambar berikut

Karena dari kotak A diambil 1 bola berwarna merah dan dari kotak B diambil 1 bola berwarna putih, maka

- $P(A) = \frac{4}{10}$
- $P(B) = \frac{5}{8}$

Sehingga Peluang terambil bola merah dari kotak A dan bola putih dari kotak B adalah

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{5}{8} \\ &= \frac{20}{80} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Demikian pembahasan Bocoran Ujian Nasional Tahun Pelajaran 2018/2019 Matematika SMA Program IPA yang sudah dikeluarkan dari blog Pak-Anang. Bagi teman-teman yang mendapatkan hard copy, teman-teman juga bisa mendapatkan softcopy nya di blog kami di https://www.blogmatematika.net

Jika ada kesalaha dalam pembahasan, mohon di maklumi. Masih dalam tahap belajar.